

2.3 - IL MODELLO MATEMATICO DELLA PREVISIONE DEL MOTO ONDOSO

Conosciuti nel modo anzidetto tutti gli elementi anemometrici, si è provveduto ad eseguire la previsione del moto ondoso secondo il seguente modello matematico.

Indicando con R_n ed R_t le componenti normali e tangenziali delle potenze trasferite al mare, mediamente in una lunghezza d'onda, dal vento cui competono componenti di pressione e di velocità rispettivamente indicate da p_n , p_t , e V_n , V_t , si avrà:

$$R_n = \frac{1}{L} \int_0^L p_n V_n dx \quad (2.3.1)$$

$$R_t = \frac{1}{L} \int_0^L p_t V_t dx \quad (2.3.2)$$

Nell'ipotesi che lo sviluppo delle onde sia da ricondurre all'esistenza di uno sforzo normale p_n , agente sulla superficie libera si ha:

$$p_n = \frac{1}{2} \rho g (U-C)^2 \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (2.3.3)$$

IL SINDACO



IL SEGRETARIO COMUNALE

[Handwritten signature]

$\eta = \frac{H}{2} \sin(Kx - \sigma t)$ è l'equazione della superficie libera

S = Coefficiente di riparo

ρ_a = Densità dell'aria

U = Velocità del vento

C = Celerità delle onde

La componente verticale della velocità orbitale in superficie W_0 può approssimativamente porsi pari a:

$$W_0 = \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (2.3.4)$$

Pertanto, la componente normale della potenza potrà scriversi come segue:

$$R_n = \pm \frac{1}{2} S \rho_a (U - C)^2 C K^2 \left(\frac{H}{2}\right)^2 \quad (2.3.5)$$

dove il segno positivo vale per $C < U$ e quello negativo per $C > U$.

L'energia dissipata per effetto della viscosità

R_μ vale:

$$R_\mu = -2\mu K^3 \left(\frac{H}{2}\right)^2 C^2 \quad (2.3.6)$$

essendo μ la viscosità.

Nelle condizioni di sviluppo delle onde, la potenza

IL SINDACO



IL SEGRETARIO COMUNALE

trasmessa dal vento al mare deve essere maggiore di quella dissipata per viscosità; si avrà pertanto:

$$/ R_n / > / R_\mu / \quad (2.3.7)$$

e quindi:

$$\frac{1}{2} \rho_a (U-C)^2 C K^2 H^2 = 2\mu K^3 H^2 C^2 \quad (2.3.8)$$

La precedente equazione, ricordando che:

$$C^2 = g/K \quad (2.3.9)$$

porge:

$$\rho_a (U-C)^2 C > 4\mu g \quad (2.3.10)$$

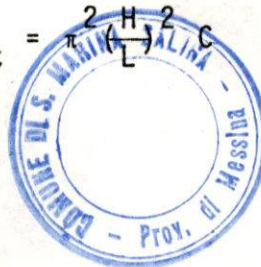
Considerando anche l'energia trasmessa al mare per effetto degli sforzi tangenziali, è opportuno scrivere questi ultimi come segue:

$$p_t = \gamma^2 \rho_a U \quad (2.3.11)$$

La velocità del trasporto di massa V_t è fornita dalla relazione:

$$V_t = \tau \left(\frac{H}{L} \right)^2 C \quad (2.3.12)$$

IL SINDACO



IL SEGRETARIO COMUNALE

La potenza trasmessa dagli sforzi tangenziali di_ viene pertanto:

$$R_t = \frac{1}{L} \int_0^L p_t v_t dx = \gamma^2 \pi^2 \rho_a \left(\frac{H}{2}\right)^2 C U^2 \quad (2.3.13)$$

La condizione di sviluppo delle onde, in tale più realistica ipotesi, comporta che:

$$/ R_n + R_t / > / R_\mu / \quad (2.3.14)$$

e quindi:

$$\pm S \rho_a (U-C)^2 + 2\gamma^2 \rho_a U^2 C \quad (2.3.15)$$

dove:

γ^2 = coefficiente di attrito.

Durante la fase di sviluppo l'energia dissipata per viscosità è un'aliquota trascurabile; può, pertanto, scriversi la seguente equazione di conservazione della energia in fase transitoria:

$$\frac{d}{dt} (EL) = \left\{ (R_t + R_n) + \frac{\partial}{\partial x} (C_g E) \right\} L \quad (2.3.16)$$

essendo:

E = Energia totale media per unità di superficie

IL SINDACO



IL SEGRETARIO COMUNALE

R

C_g = Velocità di gruppo.

Si osservi che ogni incremento nella lunghezza d'onda è causato da una variazione di celerità; poichè le due grandezze sono legate dalla ben nota relazione:

$$C^2 = gL/2\pi \quad (2.3.17)$$

si avrà:

$$\frac{\partial C}{\partial x} = \frac{1}{L} \frac{dL}{dt} = \frac{2}{C} \frac{dC}{dt} \quad (2.3.18)$$

Poichè nello stato transitorio la condizione:

$$\frac{\partial E}{\partial x} = 0 \quad (2.3.19)$$

risulta soddisfatta, si avrà:

$$\frac{dE}{dt} + \frac{E}{C} \frac{dC}{dt} = R_t + R_n \quad (2.3.20)$$

Se ora si considera lo stato stazionario, si ha:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = (R_t + R_n) - \frac{\partial}{\partial x} (C_g E) \quad (2.3.21)$$

che, essendo:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = 0$$

(2.3.22)

IL SINDACO



IL SEGRETARIO COMUNALE

R.

porge:

$$\frac{C}{2} \frac{dE}{dx} + \frac{E}{2} \frac{dC}{dx} = R_t + R_n \quad (2.3.23)$$

Introducendo la ripidità dell'onda $\gamma = H/L$ e l'età dell'onda $\beta = C/U$ si ha che (*):

$$\frac{1}{E} \frac{dE}{dx} = \frac{2}{\gamma} \frac{d\gamma}{dx} + \frac{4}{\beta} \frac{d\beta}{dx} \quad (2.3.24)$$

$$\frac{1}{E} \frac{dE}{dt} = \frac{2}{\gamma} \frac{d\gamma}{dt} + \frac{4}{\beta} \frac{d\beta}{dt} \quad (2.3.25)$$

Assumendo, inoltre, che la ripidità è funzione della sola età dell'onda, si ha:

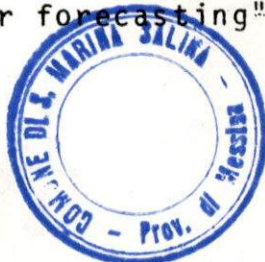
$$\frac{d\gamma}{dx} = \frac{d\gamma}{d\beta} \frac{d\beta}{dx} \quad (2.3.26)$$

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d\gamma}{d\beta} \frac{d\beta}{dt} \quad (2.3.27)$$

Le precedenti equazioni si trasformano allora come segue:

(*) SVERDRUP H.U., MUNK W.H.: " Wind sea and swell; theory of relations for forecasting". U.S. Navy Hydr.Off., 1947.

IL SINDACO



IL SEGRETARIO COMUNALE

R

1) per il regime transitorio:

$$\frac{d\beta}{dt} = AgU^{-1} \beta^{-2} \frac{1 + B (1-\beta)^2}{5 + \frac{2\beta}{\gamma} \frac{d\beta}{d\gamma}} \quad (2.3.28)$$

2) per il regime stazionario:

$$\frac{d\beta}{dx} = 2AgU^{-2} \beta^{-3} \frac{1 + B (1-\beta)^2}{5 + \frac{2\beta}{\gamma} \frac{d\beta}{d\gamma}} \quad (2.3.29)$$

dove:

$$A = 5,2 \cdot 10^{-3} \rho_a / \rho \quad (2.3.30)$$

(ρ_a = densità dell'acqua, ρ = densità dell'aria)

$$B = \pm 53,83 \text{ a secondo che } \beta \lesseqgtr 1$$

La relazione fra β e γ risulta la seguente:

a) per $0 < \beta \leq 0,35$

$$\gamma = \gamma_0 \exp m\beta$$

(2.3.31)

IL SINDACO



IL SEGRETARIO COMUNALE

[Handwritten signature]

b) per $0,35 < \beta \leq 1$

$$\gamma = \gamma_0 \exp \left\{ - \frac{1+B}{4r} \frac{1-\beta}{\beta} - \frac{1+}{8r} \ln[2-\beta] + \frac{3B+20r-1}{8r} \ln \frac{1}{\beta} \right\} \quad (2.3.32)$$

c) per $1 < \beta \leq 1,37$

$$\gamma = \gamma_0 \exp - \frac{B+10r-1}{4r} \ln \beta - \frac{1-\beta}{8r} \ln \left(1 + (\beta-1)^2 \frac{1+B}{4r} \operatorname{tg}^{-1}(\beta-1) \right) \quad (2.3.33)$$

con:

$$\gamma_0 = 0,0537$$

$$m = 1,627$$

$$\gamma_1 = 0,038$$

$$r = 0,58$$

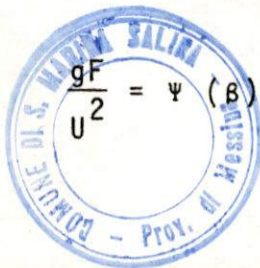
Tenuto conto di quest'ultima relazione fra β e γ , di cui è stata fornita l'espressione nei diversi campi di valori di β , l'integrazione delle precedenti equazioni differenziali porge:

1) per il regime transitorio:

$$\frac{gt}{U} = \psi_t(\beta) \quad (2.3.34)$$

2) per il regime stazionario:

IL SINDACO



(2.3.35)

IL SEGRETARIO COMUNALE

da cui, noto u , è possibile ricavare $\beta = c/u$ e quindi, c ; ricordando poi che $c = gT/2\pi$ può conoscersi il periodo.

Per ricavare l'altezza d'onda significativa si utilizza la seguente relazione:

$$gH/U^2 = 2\pi\gamma\beta^2 \quad (2.3.36)$$

Le precedenti equazioni risultano tutte implicite rispetto alle incognite H e T , è pertanto necessario utilizzare un modello matematico di previsione del moto ondoso da impiegare con un elaboratore elettronico; a tale scopo risultano particolarmente utili le espressioni del Tosi (*).

La Fig. 2.3.1 riporta il diagramma a blocchi relativo al modello matematico della previsione del moto ondoso.

(*) TOSI R.: "Ricerche sulla previsione del moto ondoso".

Scritti in onore di G. Ferro; 1970

IL SINDACO



IL SEGRETARIO COMUNALE

R

2.4 - LA DISTRIBUZIONE DELLE AMPIEZZE D'ONDA

Le escursioni verticali in un punto della superficie del mare interessato da moto ondoso hanno, nel tempo, un andamento irregolare per il quale non può precisarsi alcuna legge di tipo deterministico atta a rappresentarlo; il processo è, pertanto, di tipo stocastico.

Prendendo in esame un insieme di diagrammi, ognuno dei quali sia frutto di un esperimento condotto sempre nelle identiche condizioni, registrando cioè, in un medesimo istante, gli spostamenti in diversi punti di una zona sufficientemente ristretta, possono trarsi due tipi diversi di medie. La prima, detta media d'insieme, è quella che si ottiene considerando tutti i valori che la escursione verticale della superficie assume nelle diverse realizzazioni, per un particolare prefissato valore del tempo $t = t_1$. Una tale media è, ovviamente, tanto più esatta quanto maggiore è il numero di spettri cui viene estesa; al limite si avrà pertanto:

$$\tilde{\eta} = \int_{-\infty}^{\infty} \eta p(\eta, t) d\eta \quad (2.4.1)$$

dove $p(\eta, t)$ è la funzione di distribuzione unidimensionale

IL SINDACO



IL SEGRETARIO COMUNALE

R

nale associata alla n per quel prefissato istante; essa, pertanto, è in genere funzione del tempo t . La seconda, detta media temporale, è quella relativa ad un prefissato spettro e viene estesa a tutto il periodo di osservazione T . Un tale concetto sarà, invece, tanto più rigoroso quanto più lungo è il periodo di osservazione; potrà quindi scriversi:

$$\bar{n} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T n(t) dt \quad (2.4.2)$$

La media temporale risulta così indipendente dal tempo ma varia, evidentemente, al variare dello spettro.

In base a quanto detto è possibile suddividere i processi stocastici in tre gruppi: non stazionario, stazionario, ed ergodico.

Nei processi non stazionari le medie di insieme, calcolate per un prefissato istante, non possono essere estrapolate a qualunque altro generico istante.

Nei processi stazionari la media d'insieme calcolata per un prefissato istante $t = t_1$, si può ammettere valida per qualunque altro istante $t = t_2$.

IL SINDACO



IL SEGRETARIO COMUNALE

R

Estrapolando un tale concetto anche ai momenti di ordine superiore al primo si ha:

$$\int_{-\infty}^{\infty} n^n p(n, t) dn = \int_{-\infty}^{\infty} n^n p(n, t_2) dn \quad (2.4.3)$$

In un processo, infine, che sia stazionario ed ergodico le medie relative ad ogni singolo spettro possono essere sostituite con una qualunque media d'insieme; cioè, riferendosi ai momenti di generico ordine n , si ottiene:

$$\int_{-\infty}^{\infty} n^n p(n, t) dn = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T n^n(t) dt \quad (2.4.4)$$

In pratica però si dispone di una sola registrazione relativa ad una sola esperienza anche se estesa ad un lungo periodo di tempo. In tali condizioni è impossibile definire a priori il tipo di processo stocastico in esame. Si ammette però che i fenomeni di moto ondoso siano stazionari ed ergodici; una tale ipotesi evita di raccogliere

IL SINDACO



IL SEGRETARIO COMUNALE

R

una infinità di registrazioni ognuna estesa ad un infinito periodo di tempo e consente di utilizzare le registrazioni così come in pratica vengono realizzate.

E' possibile dimostrare che il profilo generato dal moto ondoso in un punto è in ogni istante esprimibile nel dominio delle frequenze con un infinito numero di componenti sinusoidali di ampiezza a_i , frequenza angolare ω_i e fase φ_i , grazie all'integrale di Fourier che, discretizzato in una serie, porge:

$$n(t) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cos(\omega_i t + \varphi_i) \quad (2.4.5)$$

avendo supposto, per convenzione, che il momento del primo ordine sia nullo, in modo da misurare le escursioni rispetto a tale posizione media.

Le fasi φ_i sono variabili aleatorie distribuite uniformemente nell'intervallo da 0 a 2π , in modo tale, cioè, che tutti i valori compresi nel suddetto intervallo hanno la medesima probabilità di verificarsi:

$$p(\alpha < \varphi_i < \alpha + d\alpha) = \frac{d\alpha}{2\pi} \quad (2.4.6)$$

IL SINDACO



IL SEGRETARIO COMUNALE

R

per

$$0 < \alpha < \alpha + d\alpha < 2\pi \quad (2.4.7)$$

La frequenza angolare ω_i varia con continuità nell'intervallo da 0 ad ∞ e per ogni valore di essa è ammissibile la seguente relazione di Airy:

$$\omega_i = \frac{2\pi}{T_i} = \sqrt{\frac{2\pi g}{L_i} \operatorname{th} \frac{2\pi h}{L_i}} \quad (2.4.8)$$

essendo h la profondità ed L_i la lunghezza d'onda.

Un tale modello matematico, pertanto, riduce il diagramma originario ad un gruppo di semplici onde sinusoidali la cui somma è atta a riprodurre la complessità della superficie del mare.

Ricordando ora che, in virtù del teorema del limite centrale, una variabile stocastica che sia somma di k variabili stocastiche, tali che nessuna dia alle altre un contributo preponderante, per k che tende all'infinito, si

IL SINDACO



IL SEGRETARIO COMUNALE

R

distribuisce secondo la seguente legge normale o di Gauss:

$$p(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp - \frac{\eta^2}{2\sigma^2} \quad (2.4.9)$$

essendo σ^2 la varianza che coincide con il momento del se condo ordine quando, come nel caso in esame, sia nulla la media della variabile stocastica.

In effetti vi sono almeno due motivi per ritenere che il fenomeno non sia rigorosamente gaussiano. Il primo è che le onde risultano limitate in altezza per il fenomeno del frangimento, così che le onde molto alte, possibili anche se poco probabili secondo la distribuzione normale, sono in alcuni casi fisicamente irrealizzabili. Il secondo è che la superficie del mare, nella generalità dei casi, non oscilla simmetricamente intorno ad una posizione media, i cavi, infatti, appaiono più lunghi e meno accentuati delle creste di modo che la curva di distribuzione non sarà mai perfettamente simmetrica rispetto all'asse delle ordinate.

Una tale circostanza è stata messa in evidenza da Kinsman nel 1960 dalle cui elaborazioni statistiche si de

IL SINDACO



IL SEGRETARIO COMUNALE

A handwritten signature in dark ink, located below the "IL SEGRETARIO COMUNALE" text.

duce che i cavi hanno una frequenza maggiore dei dorsi solo per bassi valori dell'escursione verticale, mentre per i valori più alti le maggiori frequenze si hanno per le creste.

Le differenze fra la curva di distribuzione ricavata dall'A. e quella normale potrebbero assumere un certo peso se si volesse sviluppare un rigoroso modello matematico mirante a spiegare il fenomeno geofisico del trasferimento di energia dal vento al mare, ma risultano trascurabili per gli scopi ingegneristici cui sono destinati i metodi previsionali.

Facendo riferimento, infatti, al valore assoluto dell'escursione verticale rispetto al valore medio, le differenze fra le distribuzioni ricavate sperimentalmente e quella normale di Gauss si compensano e la curva di distribuzione che ne nasce è quasi rigorosamente gaussiana.

Una tale circostanza non solo semplifica di molto il problema, ma consente di affinare ulteriormente l'indagine.

Si dimostra, infatti, che se una funzione stocastica ergodica a spettro stretto è distribuita secondo la funzione di Gauss con media nulla e varianza σ^2 , le ampiezze del

IL SINDACO



IL SEGRETARIO COMUNALE

la oscillazione si distribuiscono secondo la seguente legge di Rayleigh:

$$q(a) = \frac{a}{\sigma^2} \exp - \frac{a^2}{2\sigma^2} \quad (2.4.10)$$

per $0 \leq a \leq \infty$

La corrispondente funzione cumulativa di distribuzione si scrive come segue:

$$Q(a \leq a_1) = \int_0^{a_1} q(a) da = 1 - \exp - \frac{a_1^2}{2\sigma^2} \quad (2.4.11)$$

L'indagine può vantaggiosamente essere spinta più oltre chiedendosi quale sia, per un insieme N di valori di a, il valore medio degli N/n valori più alti di a, ovvero il valore medio della distribuzione troncata $q_1(a)$ definita dalla:

$$q_1(a) = 0 \quad \text{per } 0 \leq a \leq k \quad (2.4.12)$$

$$q_1(a) = q(a) \quad \text{per } k \leq a \leq \infty$$

IL SINDACO



IL SEGRETARIO COMUNALE

A handwritten signature in black ink, consisting of a stylized 'R' followed by a flourish.

dove k deve soddisfare alla relazione:

$$\int_0^k q(a) da = \frac{1}{n} \quad (2.4.13)$$

Con complessi passaggi, che non è il caso di riportare, si ottiene una espressione, calcolabile solo con l'ausilio di un elaboratore elettronico, atta a fornire la media cercata in funzione di n .

La Tab. 2.4.1 riporta, in funzione di n i valori di $a_{1/n}$ avendo assunto pari all'unità l'altezza d'onda significativa.

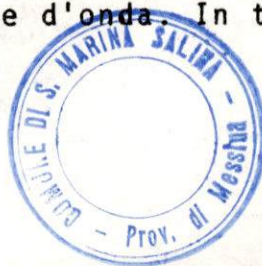
Ci si può inoltre chiedere il valore dell'ampiezza d'onda massima più probabile per un assegnato numero d'onde.

In ogni spettro d'onde è possibile osservare, infatti, delle ampiezze d'onda eccezionali di cui è bene avere conoscenza anche se hanno una piccola frequenza probabile.

Se si fossero effettuati k rilevamenti contemporaneamente in ogni diagramma sarebbe stato possibile individuare un'ampiezza d'onda massima, in genere diversa da realizzazione a realizzazione e si sarebbero potute così ridurre le proprietà della distribuzione delle più grandi ampiezze d'onda registrate.

In genere, però, si dispone di una sola registrazione contenente N ampiezze d'onda. In tal caso, nella suddetta

IL SINDACO



IL SEGRETARIO COMUNALE

R

ipotesi di processo ergodico, bisogna cercare la probabilità che il massimo delle N ampiezze sia compreso fra un prefissato valore a_m e $a_m + da$.

Per il principio della probabilità composta e totale, i valori di a_m che soddisfano alla precedente condizione si distribuiscono secondo la legge:

$$w(a_m) = Nq(a_m) \left[\int_0^{a_m} q(a) da \right]^{N-1} \quad (2.4.14)$$

che, sostituendo a $q(a)$ il valore fornito dalla (2.4.10), porge:

$$w(a_m) = N \frac{a_m}{\sigma^2} \exp - \frac{1}{2\sigma^2} \left[\int_0^{a_m} \frac{a}{\sigma^2} \exp - \frac{a}{2\sigma^2} da \right]^{N-1} \quad (2.4.15)$$

Derivando tale espressione rispetto ad a_m e ponendola uguale a zero, si otterrà, in funzione di N , il valore massimo più probabile, come soluzione di un'equazione trascendente, risolubile con un elaboratore elettronico.

I risultati maggiormente utili nelle pratiche realizzazioni sono riportati nella tabella 2.4.2 con riferimento

IL SINDACO



IL SEGRETARIO COMUNALE

all'altezza d'onda significativa unitaria.

Il valore medio del massimo dell'ampiezza d'onda è fornito, invece, dalla formula:

$$\bar{a}_m = \int_0^{\infty} a_m w(a_m) da_m \quad (2.4.16)$$

che, sostituendo l'espressione di $w(a_m)$, porge:

$$\bar{a}_m = \int_0^{\infty} \left\{ N \frac{q_m^2}{\sigma^2} \exp - \frac{q_m^2}{2\sigma^2} \left[\int_0^{a_m} \frac{a}{\sigma^2} \exp - \frac{a}{2\sigma^2} da \right] \right\} da_m \quad (2.4.17)$$

Longuet-Higgins ha dimostrato che tale valore medio, in un treno di N onde, è dato dalla espressione:

$$\bar{a}_m = \sqrt{2\sigma^2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{s=1}^N (-1)^{s+1} \frac{N!}{(N-s)!s!\sqrt{s}} \quad (2.4.18)$$

Tale risultato va inteso nel senso che se si fossero effettuate parecchie osservazioni di N onde ciascuna, con varianza costante, la media dei massimi delle ampiez

IL SINDACO



IL SEGRETARIO COMUNALE

[Handwritten signature]